

2024年江西省研究生数学建模竞赛题目

聚变反应堆设计

聚变能是一种核能形式，它的主要应用方式是通过大型基本负荷发电站进行电力供应。和其它能量供应方式相比，聚变能在燃料蕴藏量、环境影响和安全性都有很大的优势。聚变反应主要是通过氘核(D)和氚核(T)发生反应产生 α 粒子和中子，并释放能量，我们称之为DT反应。在自然界中选取这两种很轻的元素进行聚变反应和元素的结合能有关。从微观角度看，氘核和氚核之间的碰撞引起核聚变，该过程和(反应)截面、平均自由程、碰撞频率、碰撞时间和反应速度等概念有关。

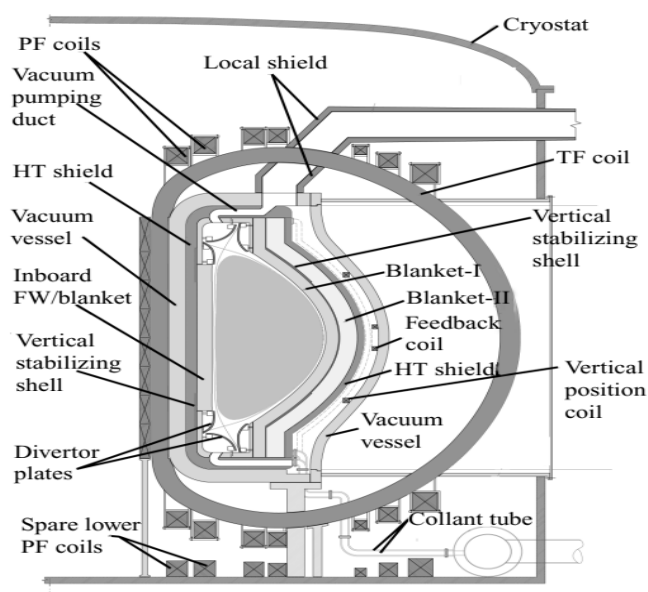


图 1: ARIES-AT商业聚变反应堆的截面图[1]

磁约束聚变反应堆通过磁场把热等离子体约束到一个环形的三维区域（拓扑结构等价于轮胎内部）中。和等离子体最接近的一层称为“第一壁”，磁场的约束确保热等离子体和第一壁不接触。第一壁的外层是包层（Blanket I, Blanket II），它是进行能量转换的地方。围绕包层是屏蔽层(HT shield)，用来保护磁体和工厂免受中子和 γ 射线的辐射。最后，在屏蔽层

的外面安装的是生产磁场的线圈(coil)。聚变反应堆的一个截面如图1所示。

包层和屏蔽层(Shield)的结构如图2所示。包层包括中子倍增区(Neutron multiplier)、中子慢化区(Moderator)和燃料倍增区(Breeder)。紧临第一壁(First wall)的是中子倍增区，它被用来产生中子以补充包层内各种不可避免的中子损失，例如，在冷却管道(Cooling tubes)中冷却液和结构材料等的吸收引起的损失。聚变产生的14.1 MeV中子穿过相对较薄的中子倍增区剂区，其中部分中子将通过倍增反应产生两个新的中子。在往外的是中子慢化区。慢化剂将快中子慢化为热中子，使它们可以很容易地被 ^6Li 俘获。有多种锂化物可作为慢化剂，它们依包层的具体要求可分为固态、液体金属或熔岩。燃料增殖区也称氚增殖区，其中的反应参考附件。包层本身由屏蔽层包裹着，屏蔽层的作用是吸收逃离出包层的中子以及由次级核反应产生的 γ 射线。这种吸收层必须做到基本上彻底，因为屏蔽层外面运行在5K 到10 K温度下的超导线圈，通常采用低温冷却系统，磁体的可承受的热负荷很小。嵌入包层的是一套冷却管道。冷却剂可以是液体或气体，它的作用就是带走高温粒子慢化放出的聚变产生的热量。聚变能正是由此通过适当的热转换系统最终转化为电能。这是聚变发电反应堆的一个主要目标。

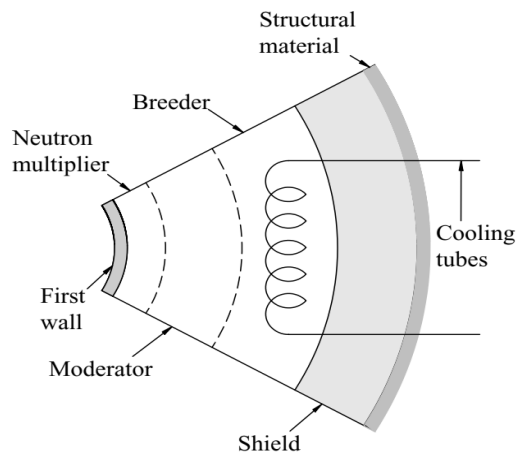


图 2: 第一壁、包层和屏蔽层结构[1]

为了简化讨论，各层都简化为环形结构，截面如图3所示。中间的线表示轮胎的旋转中心对称轴，过对称轴做一个截面就是图3。 a 、 b 和 c 分别是等离子体的小半径、包层/屏蔽层的

厚度和磁体的厚度。 R_0 为截面中心到对称轴的距离，称为大半径。

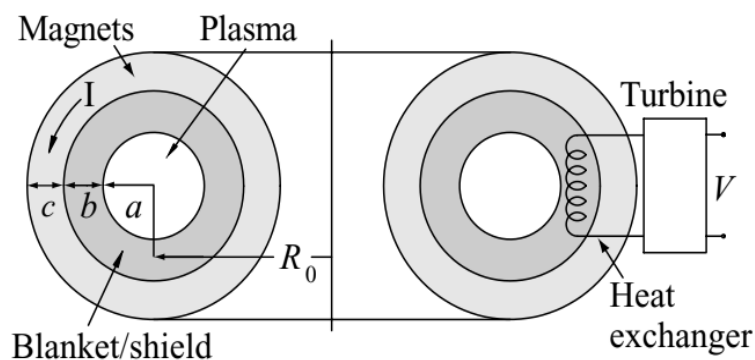


图 3: 环形截面[1]

在设计反应堆时，需要考虑四个工程约束和三个核物理约束，这些约束直接影响到反应堆的设计。四个工程约束介绍如下。

首先，典型的大型电站产出的电力大约1000 MW，我们的反应堆按该值进行设计，记 $P_E = 1000 \text{ MW}$ 。

其次，第一壁的壁负载存在极限。为了不对壁材料造成不可接收的损伤，通过第一壁的单位面积功率存在安全上限。壁负荷的主要来源是通过第一壁的 $E_n = 14.1 \text{ MeV}$ 的中子。它们以角度均匀的功率分布沉积在四周。这种中子通量能导致各种辐射引起第一壁材料的损伤，包括溅射、脆化等。现有材料的研究表明，负载极限可取为 $1 \sim 6 \text{ MW/m}^2$ 。我们取单位面积的壁负载为 $P_W = 4 \text{ MW/m}^2$ 。

工程的第三个约束是超导磁体的电性能。为使得磁体保持其超导性，它的温度 T 、电流密度 J 以及磁场 B 必须满足约束条件；否则，超导磁体恢复到超导性能相对较低的状态。我们取最大磁场为 $B_{\max} = 13 \text{ T}$ 。

第四个工程约束也与磁场有关。强场磁体会因自生磁压产生巨大的力。如果没有足够牢固的结构支撑系统，这种磁力可以令磁体完全解体。强场超导磁体的规模和成本受到结构支持系统的制约。因此磁体设计的关键参数取决于支持结构（通常是不锈钢）的最大允许应力。取最大允许平均应力为 $\sigma_{\max} = 300 \text{ MPa}$ 。

三个核物理约束介绍如下。第一个制约因素是DT聚变反应截面的大小。由于反应截面与

每秒发生的聚变反应数目有关，因此它最终决定了给定体积所需的等离子体压强。比如，在温度 $T = 15 \text{ keV}$ 时，反应截面约束为 $\langle \sigma v \rangle = 3 \times 10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$ 。

第二个核物理约束因素与包层有关。通过锂-中子反应来获得好的氚增殖，要求将 $E_n = 14.1 \text{ MeV}$ 中子减速至慢速度，即它变为 $E_t = 0.025 \text{ eV}$ 热中子。这个通过包层的锂材料与中子慢化材料相结合实现的。慢化材料中慢化中子的平均自由程是一个关键参数，它在很大程度上决定了包层的厚度。我们取慢化截面为 $\sigma_{sd} = 1 \text{ b}$ (靶恩)。

第三个核物理约束也和包层有关。中子一旦被慢化材料慢化，就很容易被 ^6Li 捕获来增殖氚，捕获截面称为第三个约束。 $E_t = 0.025 \text{ eV}$ 热中子的氚增殖截面为 $\sigma_{br} = 950 \text{ b}$ (靶恩)。

问题1：建立模型分析慢化区/增殖区中温度和中子通量的变化，并确定它们的厚度 b 的大小。

问题2：建造核反应堆的总资金成本包括两方面：固定成本 K_F 和核岛成本 K_I 。固定成本是指与能源种类(如聚变、裂变、化石燃料等)无关的基本相同部分。这些成本包括发电机组、发电机组、建设设施等。核岛成本是指与核聚变装置直接相关的成本，它们主要由包层-屏蔽和磁体这样的大的工件的建设成本决定。假设固定成本与电力输出 P_E 成正比，核反应堆的设计的目的是极小化单位电力输出需要的总资金。针对上述的工程约束和核物理约束，如何确定核反应堆的尺寸 (a, b, c, R_0) 使得该目标函数达到最小。

问题3：对于您在问题2中设计的参数，计算下面物理量：功率密度、等离子体的压强、温度、数密度。粒子需要加热直到发生聚变反应，分析最低的点火要求，并确定等离子体稳态运行的持续时间 τ_E 。

问题4：除了等离子体的环形结构外，请对其它结构进行尝试和分析。

References

- [1] J. P. Freidberg, Plasma Physics and Fusion Energy, Cambridge University Press, 2007

参考资料：

1 聚变能的安全性

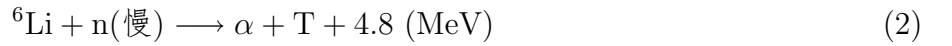
聚变能主要有三大优势：燃料蕴藏量、环境影响和安全性。首先考虑燃料蕴藏量问题。反应速率足够快的聚变反应有两种，它们都用到了纯净的氘、以及氘(D)和氚(T)的等量组合。天然的氘存在于海水中，平均每6700个氢(H)原子就有一个氘原子。氘的提取也很容易，成本非常低。氘氘(DD)反应生产的能量超过氘氘(DD)反应，和DD反应相比，DT反应的速度更快。从燃料储备方面说，DT反应堆和DD反应堆的氘可以使用几十亿年。氚是一种半衰期约为12年的放射性同位素，地球上没有天然的氚存在，但氚可以通过锂同位素 ^6Li 的反应来增殖获得。 ^6Li 是聚变堆包层的一个组成部分。这样，DT聚变的总体燃料储备转化为 ^6Li 的储备限制。地质估计表明，地球上可获得的廉价 ^6Li 可用2万年。聚变能的第二个优势是对环境的影响小。聚变反应不产生 CO_2 或其它温室气体，也不会向大气排放其它有害化学物质。聚变反应的主要代谢物是无害的惰性气体氦气。聚变反应的最大的环境问题是，不论DD反应和DT反应，都会产生高能中子。这些中子被聚变包层里被捕获，因此不会对公众产生威胁。然而，当它们经过包层的结构材料时，中子会造成结构材料改性，使得材料变得具有放射性。但是即便如此，这种放射性结构材料的半衰期很短，因此，更换下来需要存贮的时间也短，在100年量级。总的来说，从整体环境上考虑，聚变能时一种比化石燃料、核能(重原子核 ^{235}U 裂变反应)和其它可再生能源更吸引力。聚变能的第二个优势是安全性。由于聚变时一种核过程，因此，人们非常在意如三哩岛事件那样的放射性灾难。和聚变反应堆，在裂变反应堆里，相当于电力生产几年的整个能量被即使地存贮于反应堆的堆芯，正是这种巨大的能量使得裂变堆有可能崩塌。而聚变反应堆的工作并不取决于大量燃料的链式反应。相反，燃料必须源源不断地送入反应堆才能维持所需的消耗。最终的结果就是，在任何时刻，聚变反应堆内的燃料质量都非常少，也许仅相当于几面邮票的重量。正是这种任何瞬间都极少燃料使得聚变堆不可能发生崩溃。上述三个优势使得聚变能在将来会成为终极能源，就像太阳的核聚变反应使得地球幸运的成为人类家园。

2 聚变的反应

DT反应氘核和氚核之间的聚变反应，它比DD反应和D-³He反应(氘和氦-3原子核聚合)更容易发生，虽然它比²³⁵U的裂变相比触发条件更困难。我们只对DT反应进行讨论。DT反应式为



即一个氘核D和氚核T聚合反应产生一个 α 粒子(氦-4)、一个中子n并释放17.6MeV能量。DT反应区周围的包层内存在⁶Li和中子的反应



即一个⁶Li和慢的中子聚合反应产生一个 α 粒子、一个中子n、一个氚核并释放4.8MeV能量。该反应称为氚的增殖反应，从而解决DT反应中的原料氚。

聚变反应的两种反应产物用下标1和2表示。假设聚变前粒子是相对静止，从聚变反应前后的能量和动量的守恒得到

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = E, \quad m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \quad (3)$$

即

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}E, \quad \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}E \quad (4)$$

即较轻的粒子携带了大部分能量。比如，DT反应中释放的能量为 $E = 17.6\text{MeV}$ 。反应产物为一个 α 粒子和一个中子，质量比为 $m_\alpha/m_n = 4$ ，故 α 粒子的动能为 $E/5 = 3.5\text{MeV}$ ，中子的动能为 $4E/5 = 14.1\text{MeV}$ 。DT反应也可以写为



3 结合能

考虑一种原子核由 N 个中子和 Z 个质子组成的基本化学元素。 N 个中子和 Z 个质子的总质量为 $Nm_n + Zm_p$ ，其中 $m_n = 1.008\,66\text{u}$ 和 $m_p = 1.007\,28\text{u}$ 分别为一个中子和一个质子的质

量， $u = 1.660\,565\,5 \times 10^{-27} \text{kg}$ 是原子质量单位。有 N 个中子和 Z 个质子结合后得到原子核的质量数 A 近似为 $N + Z$ ，原子核的质量为 $m_A = Au$ 。该元素的结合能定义为

$$E_B = (Nm_n + Zm_p - m_A)c^2 \quad (6)$$

其中 c 为光速。结合能反应了中子和质子结合在一起需要释放的能量，也就是说，原子核加上结合能 E_B 才是各个组分的能量之和。 E_B/A 原子核每个核子上的平均结合能的度量。 E_B/A 是 A 的函数，称为结合能曲线。对周期表中每个元素(对应一个 A)都可以计算平均结合能，我们发现，轻元素和重元素的平均结合能较小，而处在中间位置的铁元素($A \approx 56$)的平均结合能较大，所以，轻元素和重元素的更容易触发核反应。轻元素聚合成结合能较强的较重元素，意味着这种反应会有能量释放。类似地，重元素通过裂变变为结合能较强的较轻元素，意味着这种反应也会有能量释放。结合能曲线的形状是强的短程核力和弱的长程库仑力竞争的结果。

4 相关概念

截面定量地描述了一对氘氘原子核发生聚变反应的概率。假设氘核静止，氘核以速度 v 向它运动。我们把氘核当成靶粒子，把氘核当成入射粒子。现在想象靶粒子被球形的力场包围。与入射粒子运动方向垂直环形区域是一个截面 σ 。如果入射粒子穿过 σ 区域，那么靶粒子施加在它上的力足够强，从而发生核反应。这种相互作用可以称为“碰撞”。如果入射粒子没有穿过 σ 区域，那么它受到靶粒子的作用力就很弱，将不会发生碰撞。尽管截面的概念很简单，但是确定 σ 的大小、它和 v 的函数关系以及它和几何形状的关系都不容易，这主要取决于粒子间相互作用力的本质。支配聚变反应的短程核力是我们预料到截面大小在原子核直径的量级。最简单的假设是截面大小 σ 和粒子入射速度 v 以及几何形状无关，把入射粒子和靶粒子作为硬球处理。

直观地看， σ 的值和发生聚变碰撞的概率有关。大的 σ 意味着靶粒子大，触发碰撞相对容易，或者说概率相对较高。截面 σ 和碰撞概率通过“自由平均程”有关。平均自由程可以理解为入射粒子发生碰撞之前行进的平均距离。高的靶粒子密度和大的截面意味着入射粒子无

需行进太远距离就能够发生碰撞。

碰撞频率 $\nu_m = 1/\tau_m$ 是平均碰撞时间 τ_m 的倒数，平均每秒有 ν_m 个粒子发生碰撞。对于核相互作用，一个入射粒子只能经历一次碰撞，之后该粒子将不再以原来的形式存在。但同时还有很多其他种类的碰撞，特别是带电粒子之间的库仑碰撞，同一粒子可以不断碰撞而不改变自身的特征。对于这些多次互相作用， ν_m 还是可以理解为单个粒子每秒发生的平均碰撞数。

反应速率 R_{12} 定义为单位体积、单位时间内的聚变碰撞次数。反应速率可表示为

$$R_{12} = \frac{dF\Gamma Adt}{Adxdt} = n_1 n_2 \sigma v \quad (7)$$

n_1 和 n_2 分别是氘核（靶粒子）和氚核（入射粒子）的数密度， σ 是反应截面， v 为入射粒子和靶粒子的相对速度大小。

如果每次碰撞产生能量 E_f ，则单位体积每秒产生的总能量为

$$S_f = E_f R_{12} = E_f n_1 n_2 \sigma v \quad (\text{W/m}^3) \quad (8)$$

用 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 表示某种粒子的数密度分布函数，依赖空间 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 、速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 和时间 t 。依赖于 \mathbf{r} 和时间 t 的数密度为

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f d\mathbf{v} \quad (9)$$

右边表示 f 对三个速度分量进行积分。一般地， $W = W(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 的平均为

$$\langle W \rangle = \frac{\int W f d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{v}} = \frac{\int W f d\mathbf{v}}{n(\mathbf{r}, t)} \quad (10)$$

记 $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 和 $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 分别表示靶粒子和入射粒子的数密度分布函数。一般地，截面 $\sigma = \sigma(v)$ 依赖入射粒子相对靶粒子的相对速度大小 $v = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ ，反应速度可修正为

$$R_{12} = \int f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) \sigma(|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|) |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle \quad (11)$$

我们省去了 \mathbf{r} 和 t 的书写。 S_f 被推广为

$$S_f = E_f n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle \quad (12)$$