2021年中考“图形的性质”专题命题分析

陈莉红，曹经富
（江西省教育厅教学教材研究室；江西省吉安市白鹭洲中学）

摘　要：以2021年全国各地中考数学试题为研究对象，对其中有关“图形的性质”的试题的命题特点进行分析，归纳这类试题的命题方式，预测未来的命题趋势，为一线复习教学提供参考.

关键词：图形的性质；命题思路；命题趋势；数学素养

以2021年全国各地中考数学试题为研究对象，并抽取了包含新疆（不含西藏）在内的覆盖全国各省的35套试卷为整卷样本，对其中有关“图形的性质”的试题进行分析，归纳这类试题的命题特点，预测未来的命题趋势. 本文将分别从考查内容、命题思路、复习建议三个方面进行分析，并提供适量的模拟题，为一线复习教学提供参考.

一、考查内容分析

初中阶段几何学习的对象主要是点、线、面、角、三角形、平面多边形和圆等几何图形. “图形的性质”“图形的变化”“图形与坐标”分别从演绎证明、运动变化、量化分析三个方面研究这些图形的基本性质和相互关系. 这三个部分相当于研究基本图形的三个不同角度，既相互独立又相互交织. 在难度较大的综合性试题中，“图形的性质”与其他两个部分或者其他领域的知识往往会综合起来考查. 据抽样统计，2021年各省、市中考数学试卷中“图形与几何”的分值占整卷的40%左右，这与《义务教育数学课程标准（2011年版）》（以下简称《标准》）中“图形与几何”领域的课时分配是相匹配的. 在抽样的试卷中，“图形的性质”的分值占“图形与几何”分值的75%左右，最少的也在50%以上，河北、云南、台湾等地的占比更高，在90%左右；题量分布在4到11之间，题型基本覆盖了选择题、填空题、解答题（含运算、证明、作图等综合性、探究性、应用性试题）等，分值从2分的选择题、填空题到14分的解答题甚至压轴题不等. 随着全国中考改革的全面推进和教育部中考命题评估的全覆盖，大多数省、市中考都已体现“二考合一”的特点，对“图形的性质”的考查也在悄然发生变化，2021年有更多省、市的中考数学试题对“图形的性质”考查难度有所降低，在回归基础、突出本质、强化思维与表达、创设情境、渗透育人价值等方面都做了有益的探索.

“图形的性质”是以平面图形为研究对象，以点、线、角为基本要素，研究基本图形中各基本要素之间的关系，以及图形与图形之间的关系，这些关系主要是指数量关系及位置关系. 主要知识内容包括：点、线、面、角；相交线与平行线；三角形；四边形；圆；尺规作图；定义、命题、定理.

“点、线、面、角”这部分内容主要有两个方面.

收稿日期：2021-11-01

基金项目：江西省教育科学“十三五”规划2020年度学科带头人专项课题——数学文化视角下初中数学教学资源开发与应用研究（20ZXYB046）.

作者简介：陈莉红（1973— ），女，中小学高级教师，主要从事初中数学教学及学业水平考试研究.

一是对点、线、面、角的认识，以及对线段、距离及角的概念的理解，再进一步理解线段和角是几何中的运算对象，是可以比较大小、求和差、可度量、可表达的对象．二是掌握几个基本事实，如两点确定一条直线、两点之间线段最短等．这些是研究初中几何的基础，会渗透在后续基本图形的学习过程中．因此，对这部分内容的考查，通常会与其他知识综合考查．2021年只有极少数中考试题以选择题、填空题的形式考查了这部分内容，属于容易题、送分题．例如，河北卷第1题，贵州贵阳卷第2题．

“相交线与平行线”这部分内容主要包括“三线八角”、垂线、垂线段、平行线等的基本概念，关于垂线、平行线的基本事实，以及平行线判定定理、性质定理等．“三角形”“四边形”“圆”分别是初中几何的基本图形，他们的研究思路基本是一致的．图形的认识（含图形及图形组成要素边、角、相关线段的定义）—图形的分类—图形的性质（各要素之间的关系）—图形的判定—图形之间的关系（全等、相似等）”等．这些内容是“图形的性质”考查的主体，既可以以不同的基本图形为载体单独考查，又可以综合考查．例如，以圆为载体与三角形或四边形综合考查，是常见的考查方式．根据抽样的35份试卷分析，这部分内容考查的分值在“图形的性质”中占比在85%以上，考查方式除了通过观察、分析、推理证明外，在加强直观理解、抽象建模、合情推理方面做了创新尝试，解答题体现了综合性、应用性、探究性．

“尺规作图”主要包含五种基本作图：用尺规作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角；作已知线段的垂直平分线；作已知角的平分线；过一点作已知直线的垂线．还有会利用基本作图作三角形，会利用基本作图完成过不在同一直线上的三点作圆，作三角形的外接圆和内切圆，作圆的内接正方形和正六边形等．根据抽样统计，2021年各地中考试题中尺规作图的考查题型有选择题、填空题和解答题，其中以解答题居多，约占60%．考查方式有以下几种：① 直接给出作图步骤，依据作图原理进行结论判断或者进一步求值，如河北卷第16题、贵州贵阳卷第7题、吉林卷第7题等；② 根据基本作图原理，运用尺规按要求作图，如陕西卷第17题；③ 以尺规作图的形式给出已知条件，进一步求值或判断，考查对作图基本操作的理解，以及相应的推理能力，如内蒙古包头卷第7题、四川成都卷第14题、新疆卷第14题等；④ 先按要求完成尺规作图，再进一步证明求解，如河南卷第23题、北京卷第20题等．可以看出2021年中考数学试题在尺规作图的考查上有在作图依据及操作原理的理解方面针对任务设计的创新，如河北卷第16题等．

“定义、命题、定理”这部分内容在《标准》中的要求是通过具体实例，了解定义、命题、定理、推论的意义，了解原命题及其逆命题的概念，会识别两个互逆命题；知道证明的意义和必要性，了解反例的作用，知道利用反例可以判断一个命题是错误的；等等．这是发展学生逻辑思维的严谨性、科学性的初步要求，是高中继续学习数学逻辑的基础，这部分要求通常会渗透在对“图形的性质”的其他内容考查的过程中．例如，在证明或求解一道几何题的时候，分析题意、寻求解决路径就需要理解要证明的结论是个怎样的命题，条件和结论分别是什么，运用哪些定理能解决这个问题，等等．往年各地的中考试题中并没有发现这部分内容的独立命题，但2021年出现了少量针对这部分内容考查的试题，如河北卷第13题、北京卷第20题等，侧重考查了证明的必要性、完备性、推理的依据等．分值为2～3分的选择题形式，属于容易题．

二、命题思路分析

“图形的性质”强调通过实验探究、直观发现、推理论证来研究图形，在用几何直观理解几何基本事实的基础上，从基本事实出发推导图形的几何性质和定理，理解和掌握尺规作图的基本原理和方法．下面将从命题立意、命题导向、命题创新三个方面进行分析．

1. 从命题立意角度分析

命题立意的内涵包括测试目标、测试载体、任务设计三个方面，本文中测试载体就是与“图形的性质”相关的所有知识，而不同的测试目标就会有不同的任务设计，考查学生的不同能力水平．因此，根据试题的测试目标可以把试题分为知识立意、能力立意和素养立意三类．知识立意主要考查对相应知识的理解与掌握的程度，检测双基的达成情况；能力立意可

以理解为在一定条件下，学生需要综合运用或迁移运用所学知识解决问题的能力，主要表现为对数学思想方法的考查；素养立意是指在创设的情境中，学生经历了完整的发现、分析、解决问题的过程，在这个过程中表现出来的阅读理解、抽象建模、转化化归、数学运算、逻辑推理等各方面的能力，在命题过程中通常通过创设情境及任务设计来体现差异. 因此，把对“图形的性质”的考查分为以下几种常见的类型.

（1）基于图形基本要素之间的内在关联设置问题，考查对基本图形的识别及定义、定理、相关性质等的理解，落实双基.

例1 （广西·贺州卷）如图1，下列两个角是同旁内角的是（　　）.

（A）$\angle 1$与$\angle 2$

（B）$\angle 1$与$\angle 3$

（C）$\angle 1$与$\angle 4$

（D）$\angle 2$与$\angle 4$

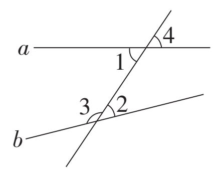


图1

例2 （辽宁·大连卷）如图2，$AB /\!/ CD$，$CE \perp AD$，垂足为点E，若$\angle A = 40°$，则$\angle C$的度数为（　　）.

（A）40°

（B）50°

（C）60°

（D）90°

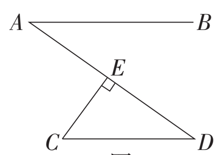


图2

例3 （浙江·杭州卷）如图3，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$的平分线BD交AC边于点D，$AE \perp BC$于点E. 已知$\angle ABC = 60°$，$\angle C = 45°$.

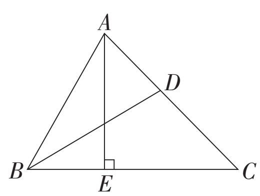


图3

（1）求证：$AB = BD$；

（2）若$AE = 3$，求$\triangle ABC$的面积.

例4 （河北卷）图4是可调躺椅示意图（数据如图），AE与BD的交点为点C，且$\angle A$，$\angle B$，$\angle E$保持不变. 为了舒适，需调整$\angle D$的大小，使$\angle EFD = 110°$，则图中$\angle D$应________（填“增加”或“减少”）的度数为________.

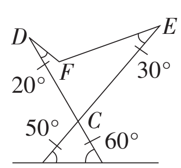


图4

【评析】以上几道试题测试载体都是三线八角或是在三线八角的基础上延伸构建出来的三角形、多边形等基本图形，考查这些基本图形构成要素（点、线段、角）之间的关系，题型可以是选择题、填空题，也可以是解答题. 根据测试目标的难度，可由简单到复杂，由静到动，由单一到综合，进行任务设计. 例如，例1仅仅是对“同旁内角”的判断，直接考查对图形的认识，属于基础题；例2在三线八角基本图形的基础上加入平行与垂直，进一步考查平行线性质与余角的运算；例3则把载体明确为三角形，针对三角形内部的边、角及角平分线、高之间的关系进行设问，考查学生的逻辑推理与数学运算能力；例4增加了动态变化元素，在变化过程中考查三角形外角与内角的关系、三角形内角和定理等知识，同时考查了学生的知识迁移能力、变中不变的思想. 这类试题难度以容易题、中档题为主，属于常见题型.

（2）基于图形与图形之间的相互关系设置不同层次的问题，考查学生综合运用图形的性质解决问题的思维能力，落实基本思想.

例5 （陕西卷）如图5，AB，BC，CD，DE是四根长度均为5 cm的火柴棒，点A，C，E共线. 若$AC = 6$ cm，$CD \perp BC$，则线段CE的长度是（　　）.

（A）6 cm

（B）7 cm

（C）$6\sqrt{2}$ cm

（D）8 cm

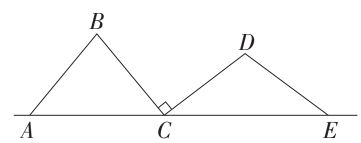


图5

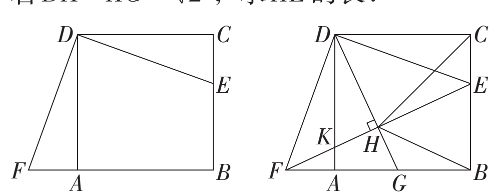
例6 （海南卷）如图6(1)，在正方形$ABCD$中，E是边BC上一点，且点E不与点B，C重合，F是BA的延长线上一点，且$AF = CE$.

（1）求证：$\triangle DCE \cong \triangle DAF$；

（2）如图6(2)，连接EF，交AD于点K，过点D作$DH \perp EF$，垂足为点H，延长DH交BF于点G，连接HB，HC.

① 求证：$HD = HB$；

② 若$DK \cdot HC = \sqrt{2}$，求HE的长.



（1）　（2）

图6

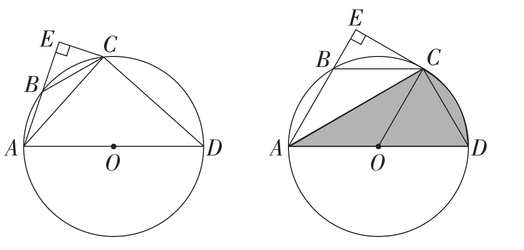
例7 （江西卷）如图7(1)，四边形$ABCD$内接于$\odot O$，AD为直径，过点C作$CE \perp AB$于点E，连接AC.

（1）求证：$\angle CAD = \angle ECB$.

(2) 若CE是$\odot O$的切线，$\angle CAD = 30^\circ$，连接OC，如图7(2)所示.

① 试判断四边形$ABCO$的形状，并说明理由；

② 当$AB = 2$时，求AD，AC与$\overset{\frown}{CD}$围成阴影部分的面积.



(1)　(2)

图7

【评析】以上试题分别以三角形、四边形、圆为载体，通过全等、相似等图形与图形之间的关系，结合三角形、四边形、圆等图形的基本性质，考查了长度、角度、面积的基本运算，以及基于图形与图形之间的逻辑推理关系.试题具有一定的综合性，通常以中档题为主，解答题居多.其中也充分体现了对应思想、转化思想和模型观念.通常每份中考试卷中都会有这样一道几何综合题，属于常见题.大多数中考数学试卷中，都会把圆作为几何综合题的载体，把对圆的基本性质、基本定理的考查作为铺垫，更注重圆中相关图形的形状、位置及大小关系的证明、计算与探究.例7以圆为素材，根据圆内接四边形上的点C在圆上的不同位置，设置不同的条件，设计了$\angle CAD$与$\angle ECB$的相等关系的证明、平行四边形的判定、求不规则图形的面积等递进式的设问，综合考查了直径所对圆周角为直角、圆内接四边形对角互补、平角的定义、直角三角形的性质，以及等角的补(余)角相等、圆的切线性质、菱形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、含有30°角的直角三角形的性质、扇形的面积等，较好地渗透了从一般到特殊、转化思想，考查了学生的直观想象、合情推理和逻辑推理能力，以及数学运算素养.类似地，还有浙江金华卷第10题，把勾股定理学习过程中常见的基本图形与圆结合起来，即以直角三角形的三条边为边向形外作三个正方形，其中正方形的顶点E，F，G，H，M，N都在同一个圆上(如图8)，任务指向求圆与直角三角形的面积之比，设问突破常规，让学生关注到不仅这三个正方形之间的面积有联系，而且这个直角三角形与圆之间也存在一定的内在联系，体现了基于教材习题的创新.

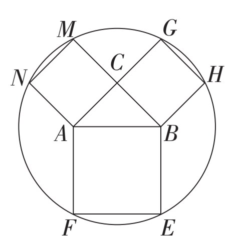


图8

(3) 基于数学活动在图形的变化中探究，落实基本思想、基本活动经验，考查学生数学素养.

例8　(湖北·武汉卷)问题提出

如图9(1)，在$\triangle ABC$和$\triangle DEC$中，$\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$，$BC = AC$，$EC = DC$，点$E$在$\triangle ABC$内部，直线$AD$与$BE$交于点$F$.线段$AF$，$BF$，$CF$之间存在怎样的数量关系？

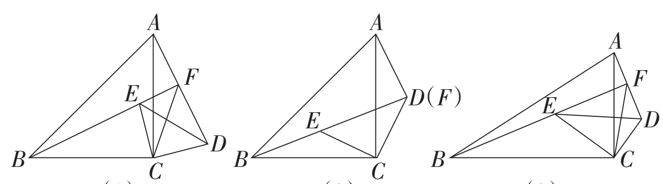
问题探究

(1) 先将问题特殊化如图9(2)所示，当点D，F重合时，直接写出一个等式，表示AF，BF，CF之间的数量关系；

(2) 再探究一般情形如图9(1)所示，当点D，F不重合时，证明(1)中的结论仍然成立.

问题拓展

如图9(3)，在$\triangle ABC$和$\triangle DEC$中，$\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$，$BC = kAC$，$EC = kDC$($k$是常数)，点$E$在$\triangle ABC$内部，直线$AD$与$BE$交于点$F$.直接写出一个等式，表示线段$AF$，$BF$，$CF$之间的数量关系.



(1)　(2)　(3)

图9

例9　(江西卷)如图10，在边长为$6\sqrt{3}$的正六边形$ABCDEF$中，连接BE，CF，其中点M，N分别为BE和CF上的动点.若以点M，N，D为顶点的三角形是等边三角形，且边长为整数，则该等边三角形的边长为________.

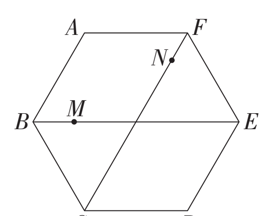


图10

【评析】《标准》中图形的变化指的是平移、旋转、相似、对称等，由于这些不属于“图形的性质”范畴，所以在本文中这一类试题没有举例.这里的图形的变化指的是动点问题带来的图形变化，或者是动

手操作过程中带来的图形变化等．例8通过共顶点的两个三角形由特殊到一般地通过一定的活动操作、观察、归纳与类比，探究相关线段之间的关系；例9以正六边形为背景，通过两条对角线上的两个动点与顶点D构建等边三角形，任务指向求等边三角形在变化过程中边长为整数时的值，重点考查分类讨论思想，还有浙江丽水卷以“红色研学”用七巧板制作“奔跑者”形象，让学生倍感亲切，七巧板是我国传统智力玩具，命制计算“奔跑者”两脚之间的跨度，让学生在玩中学数学、用数学．类似地，还有江西卷第6题，浙江金华卷第15题、浙江湖州卷第16题等．

（4）基于现实情境，考查学生的数学抽象、数学理解、数学建模素养，体现数学应用．

例10 （浙江・台州卷）小光准备从A地去往B地，打开导航显示两地距离为37.7 km，但导航提供的三条可选路线长却分别为45 km，50 km，51 km（如图11）．能解释这一现象的数学知识是（　　）．

图11

（A）两点之间，线段最短

（B）垂线段最短

（C）三角形两边之和大于第三边

（D）两点确定一条直线

例11 （吉林・长春卷）将一副三角板按如图12所示的方式摆放，点D在边AC上，$BC/\!/EF$，则$\angle ADE$的度数为_______．

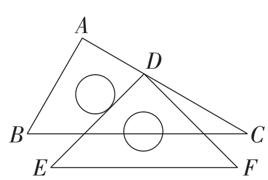


图12

例12 （青海卷）如图13，一根5 m长的绳子，一端拴在围墙墙角的柱子上，另一端拴着一只小羊A（羊只能在草地上活动），那么小羊A在草地上的最大活动区域面积是（　　）．

（A）$\dfrac{17}{12}\pi \mathrm{m}^2$

（B）$\dfrac{77}{12}\pi \mathrm{m}^2$

（C）$\dfrac{25}{4}\pi \mathrm{m}^2$

（D）$\dfrac{17}{6}\pi \mathrm{m}^2$

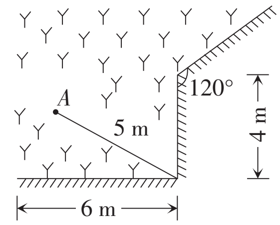


图13

【评析】例10以生活中常用的导航画面为载体，考查学生对生活现象的数学解释，强化应用，促进对数学本质的进一步认识；例11借助两块三角板，自然摆放构造出“相交线与平行线”，以填空题形式考查学生的数学抽象、几何直观及数学运算能力；例12是生活情境，考查了学生在具体情境中分析、解决问题的能力，小羊的最大活动区域是一个半径为5、圆心角为90°和一个半径为1、圆心角为60°的小扇形的面积和，对小羊活动范围的分析考查了分类讨论的数学思想及数学运算素养．这几道题难度不大，设计精巧，类似的还有山东枣庄卷第2题、湖北随州卷第3题、安徽卷第5题、湖南岳阳卷第5题等．这类试题在命制时常以学具、工具及日常生活中常见的现象或者实物为情境，从情境中抽象出数学图形，挖掘图形中边角之间的关系，进行任务设计．通常有两类任务要求：一类是在推理基础上的运算求值，如求长度、角度、弧长、周长、面积等；另一类是在对各图形之间的位置关系的猜想、验证及证明等，如证线段相等、角相等、三角形全等．试题的难度取决于素材抽象出来的数学图形的复杂程度，图形越复杂，需要用到的数学知识越丰富，对能力要求就越高，难度也就越大．

2. 从命题导向角度分析

教育部印发的《关于加强学业水平考试命题工作的意见》中明确要求，严格依据《标准》科学命题，发挥考试命题的教育教学导向功能．2021年全国各地中考数学试题普遍体现以下三个方面的命题导向．

（1）注重从教材中选取素材，问题设计回归基础，关注数学本质，对课堂教学起到良性引导作用．

例13 （浙江・湖州卷）为庆祝中国共产党建党100周年，某校用红色灯带制作了一个如图14所示的正五角星（A，B，C，D，E是正五角星的五个顶点），则图中$\angle A$的度数是_________．

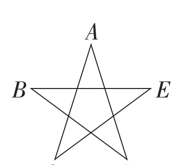


图14

例14 （内蒙古·赤峰卷）如图15，在拧开一个边长为a的正六角形螺帽时，扳手张开的开口$b = 20$ mm，则边长a的值为________.

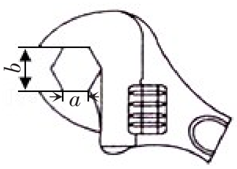


图15

【评析】例13的素材与北师大版《义务教育教科书·数学》八年级上册总复习中第199页中的第37题的图形一致，命题者给图形赋予“建党100周年”的时代特征，降低了教材习题的难度，改编成填空题，考查正多边形的性质；例14取材于人教版《义务教育教科书·数学》九年级上册第108页习题24.3中的第5题，把教材中的“综合运用”的解答题改编成填空题，并交换原题的条件与结论，降低难度，考查了正六边形有关边的计算和数学的转化思想．这些试题素材都来源于教材，学生是非常熟悉的，通过改变题型和问题设置，起到同样的考试功能．对引导教学、回归教材、重视基础、促进“双减”政策落实具有良好的导向作用．类似的试题还有河北卷第10题、山东济宁卷第7题、福建卷第7题、湖南株洲卷第8题、四川成都卷第10题、四川自贡卷第5题等．

（2）基于古代科学情境、数学文化情境进行任务设计，体现数学应用及育人价值．

例15 （甘肃卷）在《阿基米德全集》中的《引理集》中记录了古希腊数学家阿基米德提出的有关圆的一个引理．如图16，已知$\overset{\frown}{AB}$，C是弦AB上一点，试根据以下步骤完成这个引理的作图过程．

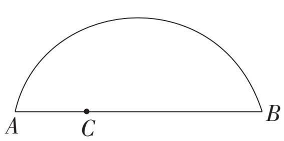


图16

（1）尺规作图（保留作图痕迹，不写作法）；

① 作线段AC的垂直平分线DE，分别交$\overset{\frown}{AB}$于点D，交AC于点E，连接AD，CD；

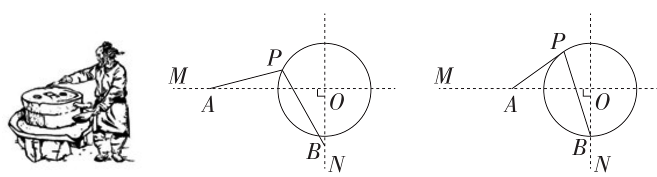
② 以点D为圆心，DA长为半径作弧，交$\overset{\frown}{AB}$于点F（F，A两点不重合），连接DF，BD，BF．

（2）直接写出引理的结论：线段BC，BF的数量关系．

例16 （河南卷）如图17(1)，在古代，智慧的劳动人民已经会使用“石磨”，其原理为在磨盘的边缘连接一个固定长度的“连杆”，推动“连杆”带动磨盘转动，将粮食磨碎，物理学上称这种动力传输工具为“曲线连杆机构”．小明受此启发设计了一个“双连杆机构”，设计图如图17(2)所示．两个固定长度的“连杆”AP，BP的连接点P在$\odot O$上，当点P在$\odot O$上转动时，带动点A，B分别在射线OM，ON上滑动，$OM \perp ON$．当AP与$\odot O$相切时，点B恰好落在$\odot O$上，如图17(3)所示．试仅就图17(3)的情形解答下列问题．

（1）求证：$\angle PAO = 2\angle PBO$；

（2）若$\odot O$的半径为5，$AP = \dfrac{20}{3}$，求BP的长．



（1） （2） （3）

图17

【评析】例15以《引理集》中阿基米德提出的关于圆的引理为素材，设计用尺规作图的步骤展示出引理的条件，让学生经历作图的过程，依据作图得到的边角关系推理得出引理的结论，感悟古人的智慧和数学的魅力；例16在古代石磨连杆工作原理的基础上进一步创设双连杆机构，即过圆上一点的两条线段与圆的动态探究问题，情境创设有新意，让人眼前一亮，体现了科学性、趣味性．类似地，湖北鄂州卷第8题根据徐光启在《农政全书》中用图画描绘的筒车的工作原理抽象成数学图形考查圆的基本性质；北京卷第20题以《淮南子·天文训》中记载的一种确定东西方向的方法为素材，通过考查尺规作图思考推理过程，并将推理过程补充完整，这既是考查学生的阅读理解能力，更是对学生思维严谨性的考查，渗透了我国古代的数学文化，也凸显了数学文化在学业评价中的重要性．

数学史料是数学命题素材来源之一，近几年关于数学文化情境试题的命制已非常普遍，命题技术也得到发展和提升．最初是直接引用史料并配上译文，让学生理解并解答，这类试题往往是送分题，没有多少思维含量；逐步发展到让学生在阅读史料的基础上，依据数学史料中的思想、方法解决问题；再发展到在数学文化的背景下进一步改编、拓展，命题的思路和内涵都比以前更加丰富了，充分体现了数学文化的应用价值及与育人价值．

（3）命制阅读理解型试题，引导教学，注重数学

思考与表达.

例17 （湖北·荆州卷）阅读下列材料，其①～④步中数学依据错误的是（　　）.

如图18，已知直线$b/\!/c$，$a\perp b$，求证：$a\perp c$.

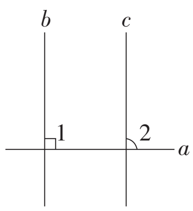


图18

证明：① 因为$a\perp b$，（已知）

所以$\angle 1=90°$.（垂直的定义）

② 又因为$b/\!/c$，（已知）

所以$\angle 1=\angle 2$.（同位角相等，两直线平行）

③ 所以$\angle 2=\angle 1=90°$.（等量代换）

④ 所以$a\perp c$.（垂直的定义）

（A）①　　（B）②

（C）③　　（D）④

例18 （贵州·贵阳卷）（1）阅读理解.

我国是最早了解勾股定理的国家之一，它被记载于我国古代的数学著作《周髀算经》中. 汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅如图19(1)所示的“弦图”，后人称之为“赵爽弦图”.

根据“赵爽弦图”写出勾股定理和推理过程.

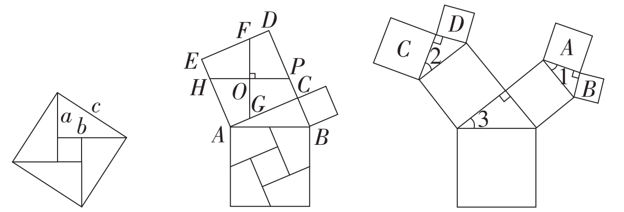
（2）问题解决.

勾股定理的证明方法有很多，图19(2)是古代的一种证明方法：过正方形$ACDE$的中心O，作$FG\perp HP$，将它分成4份，所分成的四部分和以BC为边的正方形恰好能拼成以AB为边的正方形. 若$AC=12$，$BC=5$，求EF的值.

（3）拓展探究.

如图19(3)，以正方形一边为斜边向外作直角三角形，再以该直角三角形的两直角边分别向外作正方形，重复这一过程就可以得到“勾股树”的部分图形. 设大正方形N的边长为定值n，小正方形$ABCD$的边长分别为a，b，c，d.

已知$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\alpha$，当角$\alpha$（$0°<\alpha<90°$）变化时，探究$b$与$c$的关系式，并写出该关系式及解答过程（$b$与$c$的关系式用含$n$的式子表示）.



（1）　　（2）　　（3）

图19

【评析】例17以一个命题的证明过程为阅读材料，根据阅读材料对证明依据的正确与否做出判断并选择；例18以“赵爽弦图”为阅读材料命制试题，通过阅读理解、问题解决、拓展探究三个层次递进设问，让学生经历了论证、应用和拓展的认知过程，逐步深化对勾股定理的理解，并渗透了直观想象、逻辑推理和数学运算等素养. 同类试题还有湖南长沙卷第19题以人教版《义务教育教科书·数学》八年级上册第35～36页的“作一个三角形与已知三角形全等的方法”为阅读材料设置填空题，考查学生对尺规作图的理解、全等的判定，以及判定依据的理解与表达. 还有山西卷第20题给出“图算法”的阅读材料，文字量较大，有424个字，针对这段文字设置两个问题，第(1)小题要求说出图算法的优越性，第(2)小题要求分别用代数运算和几何证明来验证图算法的正确性，既考查了实数运算，又考查了等边三角形和相似三角形的判定与性质，除了材料文字量偏大之外，也不失为一种创新的设问方式. 类似地，还有以教材中勾股定理为阅读材料考查的试题，如山西卷第8题，通过展示多种勾股定理的“无字证明”图，让学生思考、领悟其中蕴涵的数学思想方法（数形结合思想）；四川资阳卷第8题以赵爽弦图为背景，适当改编，延长中间小正方形对角线，增加新的边角关系并设问，通过构造直角三角形求解，考查锐角三角函数.

3. 命题创新点及命题趋势

与往年相比，2021年中考数学试题“图形的性质”的考查整体覆盖面更宽，各地积极探索回归基础、注重与生活之间的联系，突出数学理解的命题趋势，在尺规作图、加强几何直观、开放性试题、综合与实践试题的命制上不断尝试创新.

（1）开放性试题的尝试.

例19 （浙江·杭州卷）在① $AD=AE$，② $\angle ABE=\angle ACD$，③ $FB=FC$，这三个条件中选择其中一个，补充在下面的问题中，并完成问题的解答.

问题：如图20，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=\angle ACB$，点D在AB边上（不与点A，B重合），点E在AC边上（不与点A，C重合），连接BE，CD，BE与CD相交于点F. 若________，求证：$BE=CD$.

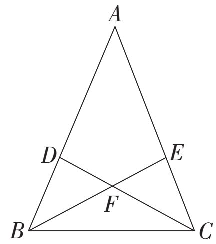


图20

【评析】此题是在限制条件下的条件开放性试题，命题者要求在三个条件中选择一个放入试题结构中，再进一步完成试题的证明，答案不唯一，任选一个条件都可证，考查了全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质等，与传统的推理证明题相比，多了学生自主选择、思考的过程，体现了创新性. 开放性试题的命制在学业水平考试试题命制过程中会受诸多因素的制约，如考试时间、难度控制、阅卷评分等，一直以来各地命题者都在谨慎探索的过程中，2020年笔者在《回归本质　适度创新——2020年中考试题总评》一文中曾列举一些在统计题的任务设计中设置开放性问题的尝试，这样的开放通常是结论的开放，2021年在“图形的性质”的考查中也出现了这样的尝试. 例如，山西卷第20题的第(1)小题，在阅读完阅读材料之后，提问“试根据以上材料简要说明图算法的优越性”就是考查学生自己的思考和理解，答案是不唯一的，具有开放性.

（2）对尺规作图考查的创新.

例20　（北京卷）《淮南子·天文训》中记载了一种确定东西方向的方法，大意是：日出时，在地面上点A处立一根杆，在地面上沿着杆的影子的方向取一点B，使B，A两点间的距离为10步（步是古代的一种长度单位），在点B处立一根杆；日落时，在地面上沿着点B处的杆的影子的方向取一点C，使C，B两点间的距离为10步，在点C处立一根杆. 取CA的中点D，那么直线DB表示的方向为东西方向.

（1）上述方法中，杆在地面上的影子所在直线及点A，B，C的位置如图21所示. 使用直尺和圆规，在图中作CA的中点D（保留作图痕迹）；

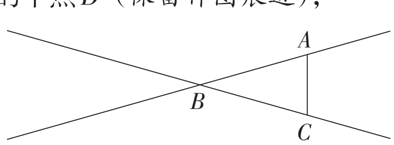


图21

（2）在图21中，确定了直线DB表示的方向为东西方向. 根据南北方向与东西方向互相垂直，可以判断直线CA表示的方向为南北方向，完成如下证明.

证明：在$\triangle ABC$中，$BA=$______，D是CA的中点，

所以$CA\perp DB$（　　）（填推理的依据）.

因为直线DB表示的方向为东西方向，

所以直线CA表示的方向为南北方向.

【评析】此题以《淮南子·天文训》中记载的一种确定东西方向的方法为素材，抽象出数学图形，设计了2道小题，第(1)小题用尺规作出线段AC的中点，第(2)小题是对第(1)小题的操作进行数学解释，说明操作的合理性，体现思维上的递进. 命题者适当降低对学生的要求，以填空的方式只需学生写出推理依据即可，从命题立意的角度来看，对尺规作图的考查不仅作为知识点，还可以作为解决问题的一种工具，在掌握操作的同时更要理解操作的依据，这会是今后尺规作图考查的方向之一. 类似试题还有陕西卷第17题，把简单的逻辑推理与尺规作图结合起来考查，强调只有理解“到两平行线l_1，l_2的距离相等的点一定是线段AB的中点，才能进一步通过作AB的垂直平分线完成任务；湖南长沙卷第19题通过尺规作图展示作三角形的过程（使它与已知三角形的三边相等），要求补全所作三角形与已知三角形全等的证明过程及推理的依据；河南卷第23题以小明和小军的两种作角平分线的方法为阅读材料，设置3道小题，前2道小题是对这两种作法的背后原理的理解和证明，第(3)小题是以小军所作的图为基本图形考查全等三角形的判定与性质等基本内容和分类讨论的数学思想，把这道题作为整卷的压轴，也是新的尝试.

（3）从直观理解基本事实及基本性质角度尝试创新，突出几何直观.

例21　（浙江·宁波卷）抖空竹在我国有着悠久的历史，是国家级的非物质文化遗产之一. 如图22，AC，BD分别与$\odot O$相切于点C，D，延长AC，BD交于点P. 若$\angle P=120°$，$\odot O$的半径为6 cm，则图中$\overset{\frown}{CD}$的长为________.（结果保留π.）

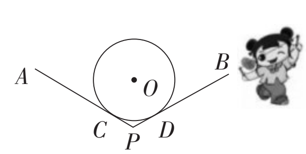


图22

例22 (河北卷)如图23,已知四条线段a,b,c,d中的一条与挡板另一侧的线段m在同一直线上,试借助直尺判断该线段是( ).

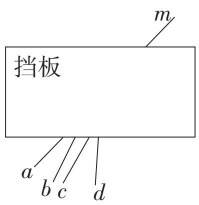


图23

(A)a (B)b

(C)c (D)d

【评析】例21以国家级非物质文化遗产抖空竹为素材,直观地将其抽象为两条直线与圆相切的问题,考查切线长定理、直角三角形和弧长的计算问题;例22设计新颖有趣,借助数学工具解释生活中常见的现象,判断被挡板挡住的线段共线问题,尽管是容易题,也凸显几何直观在数学抽象过程中的作用. 对几何直观的考查还会在一些综合探究的解答题中体现,如山东枣庄卷第24题,是一道新定义几何综合探究题,题干给出"垂美四边形"的定义,然后以"概念理解—性质探究—解决问题"为主线,依次设置三个层次的问题,在性质探究环节要求通过观察猜想AD^2+BC^2与AB^2+CD^2之间的关系并证明,凸显了直觉思维的作用,考查了学生直观想象素养,类似的试题还有很多,在此不一一赘述.

三、复习课教学启示

研究关于"图形的性质"试题的命制特点,既可以学习与改进命题技术,又是为了体现学业水平考试命题对教育教学的导向作用,促进课堂教学的提质增效. 教育部提出的"依标命题""科学命题"的要求,是为了打破"以考定教"的模式,进一步促进在课堂教学中落实立德树人的育人目标,发展数学核心素养. 因此,无论是在九年级的复习教学中还是在日常教学中,都需要注意以下几点.

1. 强化学科育人,渗透数学核心素养

理性思维是人类思维的高级形式,而数学学科育人的核心是发展学生的理性思维,培养学生良好的思维品质. 因此,在课堂教学中要注重两个方面的育人功能. 一方面,关注数学本身的学科特点,在学习过程中培养学生的数学思维,发展数学学科核心素养;另一方面,加强联系生活实际,注重创设真实情境、社会人文情境、传统文化与数学文化情境等,开展基于情境、问题导向、深度思考、高度参与的课堂教学模式,发展学生的数学学科核心素养,体现育人功能.

2. 重视知识的内在关联,整体把握"图形的性质"的主要脉络,避免机械化题型训练

教师要加强对《标准》的研究,领悟对"图形的性质"所有内容的要求,抓住研究几何图形的一般思路就是"认识图形(明确组成要素,定义相关概念)—图形性质(各要素之间的关系)—图形判定—图形之间的关系",对于每一个研究对象都可以做到一线贯穿,这是纵向的联系;不同对象之间突出内在关联,即适当地增加点、线、角等元素,就会产生新的对象及相互关系,这样就可以把相交线、平行线与三角形、四边形等全部串起来,这是横向的联系. 在纵横交错之间就可以覆盖所有的知识内容,不需要刻意把一些所谓的"模型"或者"套路"强加给学生,反复训练,让学生产生应激反应,达到快速解题的目的,这样会增加学生的负担,同时对学生的数学思维及核心素养的培养也是不利的.

3. 重视数学阅读与文化渗透,培养数学文本阅读能力与数学理解能力

在复习课的教学中,一线教师主观上会非常排斥文字量较大的数学试题,通常会在讲解过程中直接代替学生阅读,并给出数学化的结果,忽略学生自己阅读、思考、理解,并数学化的过程,导致学生对数学文本的阅读存在畏难、恐惧、抵触的心理,这与中考命题对课堂教学的导向是不符的. 加强数学与生活的联系,与传统文化、数学文化的联系,培养学生具备自主阅读、自主学习的能力. 学生必须学会通过阅读获取有价值的数学信息. 结合所学的数学知识对获取的信息进行推理、判断、识别,建立数学应用意识,是今后发展的趋势,如2021年中考数学试题中就有文字量达到400多字的单个试题. 因此,在教学过程中需要培养学生对数学文本阅读的兴趣,并能在阅读过程中自主思考,逐步学会在阅读中运用数学思维. 还可以引导学生多阅读数学史、数学科普书籍、数学家的故事等,培养学生的阅读能力. 例如,关于"勾股定理",可以让学生查阅有关历史资料,多开展交流活动等.

4. 重视开放性、探究性教学活动的设计，促进学生的思考、表达

在复习教学时，教师可以根据教学内容设计开放性、探究性问题，引领学生参与数学活动．开放性问题的设计要有基础性、层次性、发展性和挑战性．几何教学中，每一个概念的形成，每一个命题的建立，每一个结论的证明都要经过观察、分析、猜想、判断，再加以科学论证，这些都离不开基于推理的数学思考．教学中教师应鼓励学生从不同角度和方向思考问题，培养他们思维的灵活性．同时，引导学生不满足于停留在表面上，要善于概括归类，抓住事情的本质规律，预见事情发展的进程，把思维引向一定的深度和广度，培养思维的深刻性．在几何教学中，教师要注意给学生足够的时间和空间，启发学生积极思考，多让学生动手操作，经历从感性到理性、从具体到抽象的过程，并能完整、准确地表达出来，增强学生之间交流表达的时间，充分发挥学生的主体地位．

四、模拟题赏析

为了便于交流与学习，特为大家提供几道“图形的性质”的模拟题，愿与大家共同探讨．

1. 将含30°角的三角板（三个顶点分别为A，B，C）和直尺按如图24所示的方式摆放，交点分别为F，D，E，且$CD = CE$，则$\angle BFA$的值为（　　）．

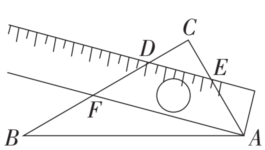


图24

（A）120°　　　（B）135°

（C）140°　　　（D）150°

答案：B.

【提示】借助平行关系、平角的定义和三角形的内角和求解．

2. 如图25，在矩形$ABCD$中，$AB = \sqrt{3}AD$，点E为AB上的动点，$\triangle DEF$为等边三角形，过点F作FK垂直BD于点K，以下结论不正确的是（　　）．

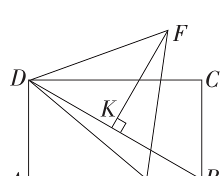


图25

（A）当点F落到CD上时，连接BF，四边形$DEBF$是菱形

（B）$\triangle DEA \cong \triangle DFK$

（C）K为BD中点

（D）若$AD = 1$，则点F的运动路径长为2π

答案：D.

【提示】此题以共顶点的矩形和等边三角形为背景，观察与思考相关点、线及图形之间的形状、位置及大小关系．

3. 下面是小于同学设计的“过直线外一点作这条直线的平行线”的尺规作图过程．

已知：直线l及直线l外一点P．求作：直线PQ，使得$PQ \parallel l$．

小于同学的作法如下：

（1）在直线l的下方取一点O；

（2）以点O为圆心，OP长为半径画圆，$\odot O$交直线l于点C，D（点C在左侧），连接CP；

（3）以点D为圆心，CP长为半径画圆，交$\odot O$于点Q，N（点Q与点P位于直线l同侧）；

（4）作直线PQ．

所以直线PQ即为所求．

试依据小于同学设计的尺规作图过程，完成下列问题．

（1）使用直尺和圆规，完成作图（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明：

证明：连接DP，

因为$CP = DQ$，

所以$\overset{\frown}{CP} = \overset{\frown}{DQ}$（　　）（填推理的依据）．

所以$\angle PDC = \angle DPQ$（　　）（填推理的依据）．

所以$PQ \parallel l$（　　）（填推理的依据）．

解：（1）如图26所示．

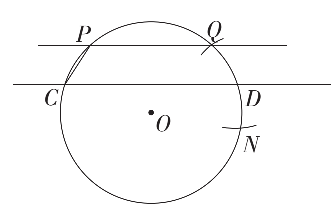


图26

(2)在同圆中，等弧所对的弧相等；在同圆中，等弧所对的圆周角相等；内错角相等，两直线平行.

4. 如图27，D是$\triangle ABC$外的一点，$DA=DC$，$\angle DCB=\angle DAB$，过点D作$DF\perp AB$于点F，$DE\perp CB$的延长线于点E，连接DB. 求证：点D在$\angle ABE$的平分线上.

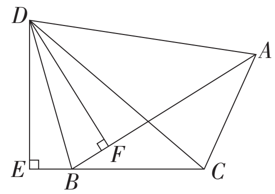


图27

证明：通过两三角形全等进行证明，具体过程略.

5. 已知$\triangle ABC$和$\triangle FDE$是等边三角形，点A，B，D，E在同一直线上，D是AE的中点，限用无刻度直尺作图.

(1)在图28(1)中作线段AE的中垂线；

(2)在图28(2)中过点F作AE的平行线；

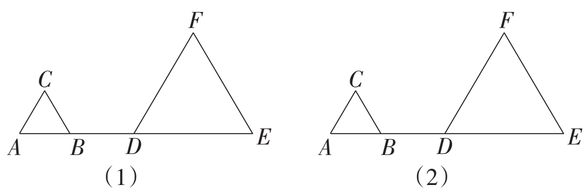


图28

答案：(1)如图29(1)，DM是所作的中垂线；

(2)如图29(2)，FQ是所作的平行线.

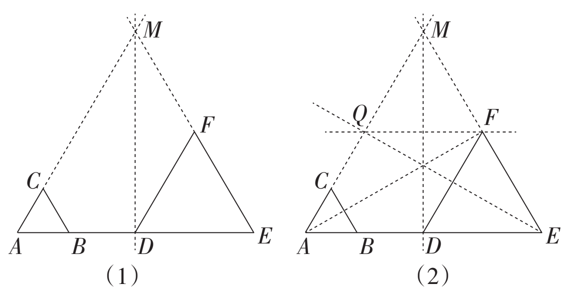


图29

6. 如图30(1)，在矩形$ABCD$中，点G为线段AD上的一动点，$\triangle ABG$的外接圆交BC交于点M，线段$OF/\!/AD$，交CD于点F，与$\odot O$交于点E.

(1)$AB=6$.

① 当AG为何值时，四边形$ABMG$为正方形；

② 当AG为何值时，四边形$BMEO$为菱形.

(2)如图30(2)，若$AB=AD=a$，$\odot O$半径为R，探究a与R满足什么关系时，$\odot O$与CD相切，并说明理由.

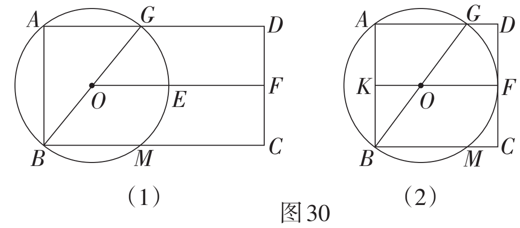


图30

解：(1)① 当$AG=6$时，四边形$ABMG$为正方形；

② 当$AG=2\sqrt{3}$时，四边形$BMEO$为菱形.

(2)$R=\dfrac{5}{8}a$，理由略.

7. 如图31，已知四边形$ABCD$和直线l，过四边形$ABCD$的各顶点分别作直线l的垂线段，分别记作d_A，d_B，d_C，d_D.

(1)若四边形$ABCD$是正方形，如图31(1)，直线l经过点D，直接写出d_A，d_B，d_C的数量关系.

(2)若四边形$ABCD$是平行四边形.

① 若直线l经过点D，如图31(2)，写出d_A，d_B，d_C的数量关系，并证明；

② 直线l不经过四边形$ABCD$的各顶点，如图31(3)，写出d_A，d_B，d_C，d_D的数量关系，并证明.

(3)若四边形$ABCD$是正方形，边长为12，如图31(4)，直线l经过CD的中点M，且直线l与CD的夹角为60°，直接写出$d_A+d_B+d_C+d_D$的值.

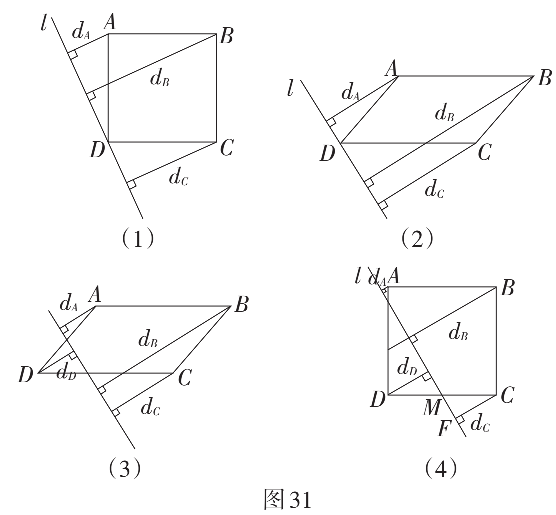


图31

解：(1)$d_A+d_C=d_B$.

(2)① $d_A+d_C=d_B$，通过三角形全等实现相关线段之间的转移求解，证明略.

② $d_A+d_C+d_D=d_B$，证明略.

(3)$12+6\sqrt{3}$.

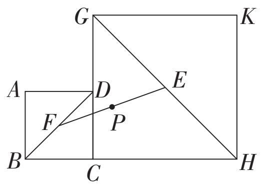
8. 如图32(1)，已知$BH=6$，点C是线段BH上的动点，分别以BC，CH为边向同一侧作正方形$BCDA$和

正方形$CHKG$，则称正方形$BCDA$和正方形$CHKG$为相伴正多边形，若点E和点F分别是相伴正多边形的中心，设P是EF的中点.

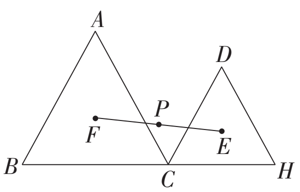
（1）延长BD交HG于点M，连接CE，CF，判断四边形$CEMF$的形状，并证明；

（2）直接写出点P运动的路径是什么图形，并直接写出该路径长；

（3）如图32(2)，若$\triangle BCA$和$\triangle CHD$是相伴正三角形，点E和点F分别是相伴正三角形的中心，P是EF的中点，求出点P的路径长.



（1）



（2）

图32

解：（1）四边形$CEMF$为矩形，证明略；

（2）点P运动的路径是一条线段，点P运动的路径长为3；

（3）点P运动的路径是一条线段，点P运动的路径长为3.

参考文献：

［1］中华人民共和国教育部制定. 义务教育数学课程标准（2011年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社，2012.

［2］陈莉红，曹经富. 回归本质　适度创新：2020年中考试题总评[J]. 中国数学教育（初中版），2021(1 / 2)：3-14.

［3］教育部基础教育课程教材专家委员会.《义务教育数学课程标准（2011年版）》解读[M]. 北京：北京师范大学出版社，2012.